Gráficas con dos ideales de distancia triviales

XL Coloquio Víctor Neumann-Lara

Carlos A. Alfaro

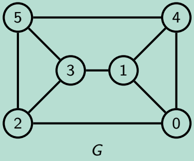
trabajo en conjunto con T.I. Hoekstra, J.P. Serrano y R.R. Villagrán

Matrices de distancia

Definición

Sea G una gráfica conexa con n vertices.
La distancia $d_G(u, v)$ entre los vertices u y v es el número de aristas en un camino mínimo entre u y v.
La matriz de distancia $D(G)$ de G es la matriz $n \times n$ cuya entrada (u, v) es la distancia $d_G(u, v)$ entre los vertices u and v.

Ejemplo



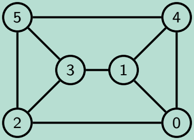
$$D(G) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Ideales distancia

Definición

Sea G una gráfica con vértices $V(G) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$. Las variables $X_G = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ son variables asociadas a $V(G)$.
Definimos la matriz $D_X(G) = diag(x_0, \ldots, x_{n-1}) + D(G)$.

Ejemplo



$$D_X(G) = \begin{bmatrix} x_0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & x_1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x_2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & x_3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & x_4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & x_5 \end{bmatrix}$$

Ideales distancia

Definición

Sea $\mathbb{Z}[X_G]$ el anillo de polinomios en las variables X_G con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

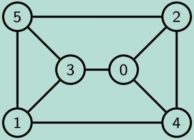
Denotemos por $\mathrm{menores}_k(D_X(G))$ al conjunto de determinantes de las submatrices de tamaño $k \times k$ de $D_X(G)$.

Para $1 \leq k \leq n$, el k-esimo ideal distancia es el ideal $\langle \mathrm{menores}_k(D_X(G)) \rangle$. Y lo denotaremos por $I_k(G)$.

Decimos que un ideal es trivial si es igual a $\langle 1 \rangle$ $(= \mathbb{Z}[X_G])$.

Ideales distancia

Ejemplo



G

$$D_X(G) = \begin{bmatrix} x_0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & x_1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x_2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & x_3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & x_4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & x_5 \end{bmatrix}$$

El primer ideal es generado por las entradas de la matriz $D_X(G)$

Una base de Gröbner para $I_4(G)$ está generada por los siguientes polinomios:

$$x_0 + x_3 - 7, x_1 + x_4 - 7, x_2 + x_5 - 7, x_3x_4 - 2x_3 - 2x_4 + 7,$$
$$x_3x_5 - 5x_3 - 2x_5 + 7, 3x_3 - 3x_5, x_4x_5 - 2x_4 - 2x_5 + 7,$$
$$3x_4 + 3x_5 - 21, 3x_5^2 - 21x_5 + 21$$

Note que $I_n(G) = \langle \det(D_X(G)) \rangle$.

Variedades de los ideales distancia

Definición

La variedad $V(I)$ del ideal I es el conjunto de las raíces comunes de los polinomios en I.

Variedades de los ideales distancia

Ejemplo

Consideremos la gráfica completa K_3 con 3 vertices.

- $I_1(K_3) = \langle 1 \rangle$, por lo que $V(I_1(K_3)) = \emptyset$
- $I_2(K_3) = \langle x_0 - 1, x_1 - 1, x_2 - 1 \rangle$, así $V(I_2(K_3,) = \{(1,1,1)\}$
- $I_3(K_3) = \langle x_0 x_1 x_2 - x_0 - x_1 - x_2 - 2 \rangle$

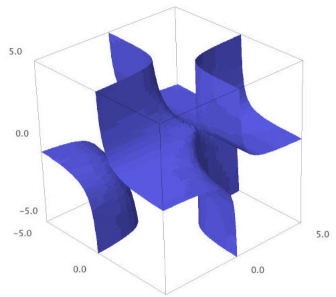


Figura: Vista parcial de $V(I_3(K_3))$ en $\mathbb{R}^3$.

Aldunas propiedades de los Ideales distancia

Se tiene que

$$\langle 1 \rangle \supseteq I_1(G,X) \supseteq \cdots \supseteq I_n(G,X) \supseteq \langle 0 \rangle.$$

Por lo que

$$V(\langle 1 \rangle) \subseteq V(I_1(G,X)) \subseteq \cdots \subseteq V(I_n(G,X)) \subseteq V(\langle 0 \rangle).$$

Las variedades de los ideales de distancia generalizan el espectro de las matrices de distancia.

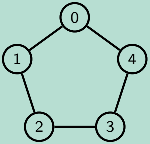
Teorema (Abiad, A., Heysse & Vargas, 2022)

Sean G y H dos gráficas de n vértices. Entonces, G y H son isomorfas si y sólo si existe una permutación σ de $V(H)$ tal que $I_n(G) = I_n(\sigma H)$.

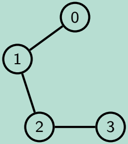
Ideales distancia de subgráficas inducidas

Los ideales de distancia NO se comportan bien al tomar subgráficas inducidas.

Ejemplo



$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \boxed{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \boxed{2} & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \boxed{3} \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{3} & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ideales distancia de subgráficas inducidas

Lema (A. & Taylor,2020)

P_4 y cualquier gráfica que contenga P_4 como subgráfica inducida tiene segundo ideal distancia trivial.

Prueba. Sea $P_4 = v_1 — v_2 — v_3 — v_4$. Considere G una gráfica que contiene a P_4 como subgráfica inducida. La única manera de reducir la distancia entre cualesquiera dos vértices, de P_4 en G, es que G tenga un vértice u adyacente a v_1 y v_4. Supongamos que es así. Entonces $D_X(G)$ contiene la siguiente submatriz

$$M = D_X(G)[V(P_4) \cup \{u\}; V(P_4) \cup \{u\}] = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ \boxed{1} & x_2 & \boxed{1} & 2 & \mathrm{a} \\ 2 & 1 & x_3 & 1 & \mathrm{b} \\ \boxed{2} & 2 & \boxed{1} & x_4 & 1 \\ 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} & 1 & x_u \end{bmatrix}$$

Como $\det(M[\{v_2, v_4\}; \{v_1, v_3\}]) = -1$, entonces $I_2(G) = \langle 1 \rangle$.

Ideales distancia de subgráficas inducidas

Es decir, P_4 es **prohibida** para las gráficas con un único ideal distancia trivial.

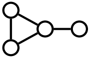
¿Podemos caracterizar las gráficas con 1 ideal distancia trivial?

Gráficas con un ideal de distancia trivial

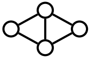
Teorema (A. & Taylor,2020)

Para G una gráfica simple conexa los siguientes son equivalentes:

1. *G tiene solo 1 ideal distancia trivial sobre $\mathbb{Z}[X]$.*
2. *G es $\{P_4, \text{paw}, \text{diamond}\}$-libre.*
3. *G es una subgráfica inducida de $K_{m,n}$ o K_n.*



paw



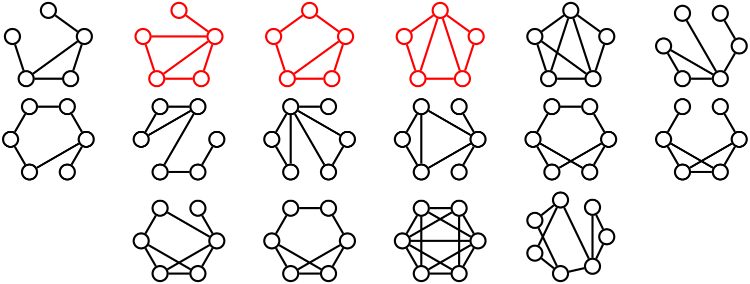
diamond

Teorema (A. & Taylor,2020)

Para G una gráfica simple conexa los siguientes son equivalentes:

1. *G tiene solo 1 ideal distancia trivial sobre $\mathbb{R}[X]$.*
2. *G es $\{P_4, \text{paw}, \text{diamond}, C_4\}$-libre.*
3. *G es una subgráfica inducida de $K_{1,n}$ o K_n.*

Gráficas con dos ideales de distancia triviales



Familia $\mathcal{F}$ de 16 gráficas.

Teorema (A., 2020)

Las gráficas con a lo más 2 ideales distancia triviales sobre $\mathbb{Z}[X]$ son $\mathcal{F}$-libres y libres de los ciclos de longitud impar mayores o iguales a 7.

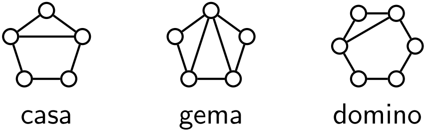
Gráficas de distancia hereditaria

Una gráfica es de distancia hereditaria si para cada subgráfica inducida H de G, y cada par de vértices $u, v \in V(H)$, $d_H(u, v) = d_G(u, v)$.

Ed Howorka

Las gráficas de distancia hereditaria:

- fueron introducidas por Howorka en 1977.
- se caracterizan por ser gráficas que no tienen una casa, un domino, una gema o un ciclo de longitud de 5 o mayor.



Gráficas perfectas

Propiedades de las gráficas de distancia hereditaria:

- son gráficas perfectas, es decir, el número cromático de cada subgráfica inducida es igual al tamaño del mayor clique de ese subgráfica.

Teorema (Fuerte de las gráficas perfectas, Chudnovsky, et. al., 2006**)**

Una gráfica G es perfecta si y sólo si G y $\overline{G}$ **no** *contienen un ciclo inducido de longitud impar mayor o igual a 5.*

Árboles

Hou

Woo

Yaoping Hou y Ching Wah Woo demostraron que la SNF de la matriz de distancia de los árboles tienen exactamente 2 factores invariantes iguales a 1.
Por lo que

$$\text{árboles} \subseteq \{F, \text{odd-holes}_7\}\text{-libres.}$$

¿Cuál será la clasificación de las gráficas con a lo más 2 ideales de distancia triviales?

Resultado principal

Teorema (A. Hoekstra-Mendoza, Serrano & Villagrán, 2025)

Para G una gráfica simple conexa los siguientes son equivalentes:

1. *G tiene a lo más 2 ideal distancia trivial sobre $\mathbb{Z}[X]$.*
2. *G es $\{\mathcal{F}, \text{odd-holes}_7\}$-libre.*
3. *G es una de las siguientes gráficas:*
   - i) C_5,
   - ii) *una gráfica bipartita conexa,*
   - iii) *una gráfica tripartita completa,*
   - iv) $K_{n-p+1,1,\ldots,1}$ *donde p es el número de particiones,*
   - v) *una subgráfica inducida de*

     $$\boxed{\overline{K}_{m_1}} - K_{n_1} - \boxed{\overline{K}_{m_2}} - K_{n_2} - \boxed{\overline{K}_{m_3}}$$

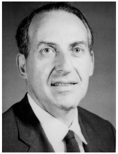
   - vi) *o una subgráfica inducida de*

     $$K_{n_1} - \boxed{\overline{K}_{m_1}} - \boxed{\overline{K}_{m_2}} - K_{n_2}$$

Otras consecuencias

Ron Graham

László Lovász



Henry O. Pollak

Hou y Woo extendieron la celebrada formula de Graham, Lovász y Pollak

$$\det(D(T_{n+1})) = (-1)^n n 2^{n-1},$$

para cualquier árbol T_{n+1} de $n+1$ vértices, demostrando que

$$\mathrm{SNF}(D(T_{n+1})) = \mathrm{I}_2 \oplus 2\mathrm{I}_{\mathrm{n}-2} \oplus (2\mathrm{n}).$$

Proposición (A. Hoekstra-Mendoza, Serrano & Villagrán, 2025)

Los 3-menores de la matriz de distancia de cualquier gráfica bipartita conexa son números pares.

Referencias

- C.A. Alfaro & L. Taylor, *Distance ideals of graphs.* **Linear Algebra Appl.** 584 (2020) 127–144.
- C.A. Alfaro, *On graphs with two trivial distance ideals.* **Linear Algebra Appl.** 597 (2020) 69–85.
- A. Abiad, C.A. Alfaro, K. Heysse & M. Vargas, *Codeterminantal graphs.* **Linear Algebra Appl.** 650 (2022) 1–25.
- C.A. Alfaro, T.I. Hoekstra-Mendoza, J.P. Serrano & R.R. Villagrán, *Graphs with two trivial distance ideals over the polynomial ring with integer coefficients.* sometido.
- M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, *The strong perfect graph theorem.* **Ann. Math.** 164 (1) (2006) 51–229.
- R.L. Graham and H.O. Pollak, *On the addressing problem for loop switching.* **Bell System Tech. J.** 50 (1971) 2495–2519.
- R.L. Graham and L. Lovász, *Distance matrix polynomials of trees.* **Adv. in Math.** 29 (1978) 60–88.
- E. Howorka, *A characterization of distance-hereditary graphs.* **Quart. J. Math. Oxford Ser.** 112 (1977) 417–420.
- Y. Hou and C. Woo, *Distance unimodular equivalence of graphs.* **Linear Multilinear Algebra** 56 (2008) 6 611–626.

¡Gracias!

Carlos A. Alfaro
https://alfaromontufar.github.io
alfaromontufar@gmail.com